計算の仕方 (4)

渡邊敏夫

XI. 公式の撰擇

前にも書いた事であるが，解析的には如何に美しくても，之を實地計算に用ひた場合不便であつては何にもならない．又計算の誤差といふものが結果に大きく影響してくるやうなものであつてもならない．それであるから，計算の都度計算に適した公式を撰擇するといふ事は計算上重要な事柄である．今次に一般的の心得を書いて見やう．

1） 計算器を使ふ場合には必ずしもさうではないが，對數計算に於ては，出來るだけ，加減を含む式を乘除だけを含む式に轉換するのである．例へば

$$
\begin{aligned}
\cos\beta\ \cos\lambda &= \cos\delta\ \cos\alpha \\
\cos\beta\ \sin\lambda &= \cos\delta\ \sin\alpha\ \cos\varepsilon + \sin\delta\ \sin\varepsilon \qquad (3) \\
\sin\beta &= -\cos\delta\ \sin\alpha\ \sin\varepsilon + \sin\delta\ \cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

は赤經 α，赤緯 δ を與へて黄經 λ，黄緯 β を求める式であるが，之では加減を含んで對數計算には都合が惡い．今

$$
\begin{aligned}
m\ \sin M &= \sin\delta \\
m\ \cos M &= \cos\delta\ \sin\alpha
\end{aligned} \qquad (4)
$$

なる補助量 m，M を導くことによつて(3)式は

$$
\begin{aligned}
\cos\beta\ \cos\lambda &= \cos\delta\ \cos\alpha \\
\cos\beta\ \sin\lambda &= m\ \cos(M-\varepsilon) \qquad (5) \\
\sin\beta &= m\ \sin(M-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

なる形に變換される．(4)，(5)を解くことによつて(3)は解き得られる．(3)に含まれる式の數は3個であるに對し，(4)，(5)に含まれる式の數は5個であるが，運算の點に於ては後者の方が遙に簡便である．

2） 角度は出來るだけその tangent から求むべきものである．其の理由は已に Ⅲ. に於て述べた處である．然しこう云つたからとて，計算公式を明に，求むる角の tangent で表はす樣に整備する必要は少しもない．前例によつて (4) に於ける M の値は logm m sin M から log m cos M を引くことによつて，

其の tangent から決定される．然し公式は tangent で表はされて居らないのである．式(5)の場合に於ても同様である．(4)及び(5)の式を直接 M, λ, β の tangent を與へる様に式を書き直すことは可能である．然し之は推薦出來ない．何となればそうしたからと云つて勞力を節約することにはならないし，又(4)，(5)を使用すれば，其等の式が示す様に運算の排列に Symmetry を與へ，而して又角の象限の決定，並びに計算の驗算を簡單ならしむるからである．

3) 求めんとする値が既知の一つの量と極く僅かしか違はないやうな場合には，計算公式は其等二つのものの差を表はす様に書き改めて，かくして計算して得た差を與へられた量に加ふれば求むる結果を得るやうにするのである．この場合には多く級數展開の法が利用される．例へば地理的緯度 ψ を與へて地心緯度 ψ' を求むる公式は

$$\mathrm{tg}\ \psi' = (1-e^2)\ \mathrm{tg}\ \psi \qquad (6)$$

で與へられる．e は地球の扁平率であつて，その値は $\frac{1}{297}$ であるから ψ' と ψ の違ひは極く僅である．從つて數値計算には

$$\psi' - \psi = -695.''66 \sin 2\psi + 1.''17 \sin 4\psi + \cdots\cdots\cdots \qquad (7)$$

が用ひられる．(7) 式の右邊の第一項は5桁を以て，第二頃は3桁の對數表を以て計算する事によつて，(6)式を7桁の對數表を以て計算したと同じ精度が得られる．

4) 計算は又しばしば近似的公式を使ふことによつても簡單にすることが出來るものである．觀測の Resultant error に比較してその數値が小さい様な項は計算公式の中から無視することが出來る．上例に於て式(7)は第三項以下多くの項が續くのであるが，實際我々が望む精度では他は無視して上記二項のみで十分である．

小さい角の三角函數を求める場合に

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots\cdots\cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots\cdots \qquad (8) \\ \mathrm{tg}\ x &= x + \frac{x^2}{3} + \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

を利用するのも又此の一例である．之等の級數展開に於て第一項のみをとると

その誤差は夫々の$\frac{x^3}{6}$, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$の程度のものであつて，近似的に次式でその誤差を評價し得る．

cosine の場合　$E[x]=\frac{1}{2}(x')^2 \times 1'$　(x'は角xを度で表はしたもの)

sine, tangent の場合　$E[x]=\frac{1}{6}(x')^3 \times 1''$

例へば$x=15'$に對しては$\sin x$からは$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^3\times 1''=\frac{1}{384}''$, 同じく$\cos x$からは$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 1'=2''$といふ近似的誤差を生ずる．三角函數表で小さい角の sine や tangent を求むる場合，又反對に sine や tangent の小さい値から角を求むる場合

$$\begin{aligned} \log\ \sin x &= \log x''+S, & \log x'' &= \log\ \sin x - S \\ \log\ \mathrm{tg}\, x &= \log x''+T, & \log x'' &= \log\ \mathrm{tg}\, x - T \end{aligned} \qquad (9)$$

によつて計算するやうになつて居るが，この S とか T と云ふのは(8)式に於ける第二項以下を意味して居るのである．即ち

$$S=\log\left(1-\frac{x^2}{6}+\cdots\cdots\right)+[4.68557]$$

$$T=\log\left(1+\frac{x^2}{3}+\cdots\cdots\right)+[4.68557]$$

5)　3)に示した事によつて，計算せんとする量と殆んど之と等しい既知の量の差を表はす公式は時々小さい角の三角函數となつて現はれて來る事がある．例として

$$\sin h=\cos P\ \sin\psi+\sin P\ \cos\psi\ \cos t$$

は星の北極距離角 P，星の時角 t，その高度 h，及び觀測地點の緯度ψの間の關係を表はして居る．之によつてψを除いた總ての星が觀測されると緯度ψが計算される．此の式を北極星へ適用した場合には，その高度 h と緯度ψの差は最も大きくして$1°12'$にしか達しないから，上式は$H=\psi-h$の函數として書き直す方がよい．今其の様に書き更めると

$$\sin H=-\sin P\ \cos t+\mathrm{tg}\,\psi\ (\cos H-\cos P)$$

となる．ここで$H\leqq P=1°12'$であるから，P^3或はそれ以上の程度の項を無視して

$$H=-P\ \cos t+\frac{P^2}{2}\mathrm{tg}\,\psi\ \sin^2 t \qquad (10)$$

となる．この(10)式の第二項には今求めんとするψが含まれて居る．然しこの

項の係數は非常に小さいから，如何なる方法でもよいからψの近似値を求めて，そのψの値で以て計算する．かくして得たψを使つて更めて計算して見て第一回に求めたψと今得たψが同じになればよいが，差があれば今求め得たψを用ひて今一度計算を繰り返し，ψの値が前回の値と異ならなくなつた時の値を最後の結果とするのである．こういふ計算の方法を連續近似値法（Successive Approximation）と云ふのである．天文計算にはこういふ計算の仕方が度々現はれて來る．

6）二つの比較的大きな而して殆んど等しい様な二數の差として一つの量を表はすやうな公式は避く可きである．（つゞく）

新刊紹介

"兵用天文　星で方角を知る法"

陸軍少將　**小嶋時久著**　　東京　恒星社發行　　價 60 錢

小嶋少將は古くからの本會員であり，天文趣味の熱心家であるが，今回上記の如き快著を公けにせられ，其の一部を贈られた．現今，非常時局の折柄，大陸の諸所に戰つてゐる將兵各位は言ふに及ばず，支那沿海封鎖に從事する海軍々人諸士も，さては訓練中の青年や，學生たちも，皆この書を讀んで，實用的天文知識の修得と，活用とを心掛けるが良いと思ふ．

この書はキク半截型で，僅々 100 頁未滿の小本であるから，携帶に便利なことは言ふまでもないが，しかも此の書中には，"星で方向を知る法"があらゆる方法を通じて詳細に書いてあるばかりでなく，多くの星座と，其の日週運動や年週運動，時刻制と時差等々のことも一通り親切に說明してあるし，尙ほ，附錄として，天文趣味の題の下に，流星，變光星，黃道光，綠閃光，星團，星雲，連星等にわたつて，常識的な解說が與へてあるし，最後に，12ヶ月の星座の見方が南天と北天とを別々の圖と共に記述してある．だから，此の書ば，まことに輕便な天文學入門である．全卷を通じて，鮮明な凸版圖が40枚も入つてあるのも見事である．又，天文用語については，現今我が國の學俗間に用ゐられる最も正しいものを使つてゐるのも嬉しい．（山本）